

Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental¹

Arlete de Jesus Brito*
Bernadete Barbosa Morey**

Resumo

Neste artigo relataremos uma pesquisa feita com professores da rede pública de ensino de Natal acerca das dificuldades que os mesmos têm em trigonometria. Buscaremos traçar alguns paralelos entre tais dificuldades e a formação inicial dos mesmos.

Palavras-chave: Formação de professores; Dificuldades; Trigonometria.

Trigonometry: Difficulties encountered by elementary school mathematics teachers

Abstract

In this paper, we related a research about the teacher's difficulties on trigonometry. We analyze the relationship between these difficulties and their initial teacher training.

Keywords: Training teacher; Difficulties; Trigonometry.

Introdução

Nossa prática profissional no Curso de Licenciatura em Matemática em Natal, dentro e fora da sala de aula, nos apontou a necessidade de instituir um curso de extensão direcionado aos professores de Matemática do Ensino Fundamental.

Por meio de um projeto conjunto assumido pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) e a Secretaria da Educação, Cultura e Desportos do Estado do Rio Grande do Norte (SECD), realizamos o curso de extensão "Formação Continuada de Professores de Matemática". O Curso aconteceu durante o ano letivo de 2001,² com um grupo de 50 professores de matemática do ensino fundamental das escolas estaduais. Dos ministrantes do curso, três eram professores da UFRN³ e os outros dois eram ligados à SECD. Do programa previsto constavam os seguintes tópicos: sistemas de numeração e operações aritméticas, álgebra, geometria e trigonometria. Paralelamente ao curso de extensão, desenvolvemos um projeto de pesquisa intitulado "Estudo do círculo: pesquisa histórico-pedagógica dos conceitos geométricos e trigonométricos", que incluía entre seus objetivos:

1. Investigar as dificuldades dos professores acerca de conceitos de geometria e trigonometria;
2. Investigar como o ensino destes conceitos vem sendo proposto nos livros didáticos das últimas quatro décadas.

O presente artigo dá ênfase aos aspectos da pesquisa relacionados aos conceitos trigonométricos e à análise realizada nos livros didáticos publicados na época da formação inicial dos professores que compuseram nossa amostra de estudo (ou seja, década de 80). Estamos entendendo por formação inicial não apenas aquela realizada em cursos de graduação, mas também a anterior a esta. A desconexão entre os conteúdos abordados pelas licenciaturas e aqueles a serem ensinados na escola básica já foi apontada em outros trabalhos (cf. Souza et al., 1995; Soares et al., 1997; Brito, 2002), sendo assim, muitas vezes os professores reproduzem em suas aulas o referencial aprendido em seus estudos anteriores à graduação. Deste modo, apesar de termos consciência da (re)formulação dos saberes dos professores ocorrida em sua prática pedagógica, não há como desconsiderar a importância da escolaridade pré-universitária na sua formação.

Metodologia

De um grupo de cinquenta professores, foi destacada uma amostra aleatória de oito professores. Com estes, realizamos uma entrevista estruturada para avaliar a sua formação em geometria e trigonometria. Com base em nossa prática docente e em leituras já realizadas por nós, levantamos hipóteses das possíveis dificuldades dos professores nestes conceitos e elaboramos atividades⁴ que contemplavam estas possíveis

Endereços para correspondência:

* E-mail: arlete@digicom.br

** E-mail: bernadetemorey@interjato.com.br

dificuldades. Tais atividades foram desenvolvidas, em forma de oficinas, com todos os cinquenta professores, ao mesmo tempo em que acompanhávamos, realizando registros, a resolução das mesmas pelos professores que compunham a amostra. Por fim, recolhemos e analisamos o material produzido pelos professores na realização das atividades.

Nossa investigação previa a análise dos livros didáticos em uso nos anos em que os professores tiveram sua formação, pois queríamos nestes livros buscar pistas que sinalizassem a origem das dificuldades destes professores com relação aos conceitos de geometria e trigonometria. Deparamo-nos com uma escassez de exemplares para análise, pois a prática comum tanto das pessoas que estudaram, como das escolas e bibliotecas, era e é jogar fora os livros dos anos anteriores.⁵

Foi então realizado um estudo sobre o modo de inserção da geometria e da trigonometria nos livros didáticos das décadas de 70 e 80, para verificar nossa hipótese inicial sobre a relação entre a formação dos professores e os livros didáticos da época em que foram formados.⁶

Análise das dificuldades dos professores

Análise das entrevistas

Dos oito professores entrevistados, dois são licenciados em matemática, quatro licenciados em ciências com habilitação em matemática e dois são licenciados em pedagogia. Todos terminaram seus cursos de graduação na década de 80 ou na de 90, ou seja, realizaram seus estudos escolares não antes da década de 70.

O tempo de docência de um destes professores era de 3 anos, o de outro, 6 anos e o restante possuía mais de 12 anos de docência. Durante este tempo, quatro deles nunca ensinaram trigonometria na escola; dois afirmaram ter ensinado os conceitos de seno, cosseno e tangente; outro afirma que trabalhou em sala de aula com o círculo trigonométrico e um último ensinou as relações, equações, inequações e funções trigonométricas.

Análise das dificuldades conceituais apresentadas pelos professores durante o desenvolvimento das oficinas

Ao organizarmos a pesquisa, tivemos como conjectura inicial que as dificuldades dos professores em trigonometria estavam relacionadas a outras em conceitos geométricos tais como simetria e semelhança. Sendo assim, antes de trabalharmos os conceitos trigonométricos dedicamos 32 horas do curso ao trabalho com simetria e semelhança (16 horas para cada um dos temas). Como havíamos pressuposto, alguns professores desconheciam os movimentos de simetria e a composição dos mesmos. Quanto ao conceito de

semelhança, observamos que todos os professores de nossa amostra só haviam trabalhado, até então, com semelhança de triângulos; sete acreditavam que a proporcionalidade dos lados homólogos de figuras semelhantes garantiria a congruência dos ângulos correspondentes e cinco deles utilizavam o processo aditivo para construir figuras semelhantes,⁷ repetindo um procedimento já constatado em pesquisas anteriores (cf. Sanches, 1991).

Após este trabalho inicial com simetria e semelhança, dedicamos pelo menos 12 (doze) horas a oficinas nas quais foram trabalhados os conceitos de trigonometria. Em tais oficinas, os professores trabalharam em grupos de quatro componentes. Ao preparar as atividades deste tema, tínhamos como hipóteses que as dificuldades dos professores em trigonometria eram:

1. Relacionar o conceito de semelhança e aqueles envolvidos em trigonometria;
2. Entender as expressões “cateto oposto” e “cateto adjacente” como uma relação entre os lados e os ângulos do triângulo retângulo;
3. Compreender por que no círculo trigonométrico a medida do raio é a unidade;
4. Transferir os conhecimentos sobre simetria ao círculo trigonométrico.

Além disso, acreditávamos que tais dificuldades eram provenientes não apenas do desconhecimento de conceitos, mas também de conceitos errôneos que haviam sido apreendidos durante a formação desses professores.

As oficinas sobre trigonometria foram compostas por quatorze atividades, mas nós vamos discutir aqui apenas aquelas cuja realização apresentou algum tipo de dificuldade.

Uma primeira atividade tinha por objetivo retomar o problema da semelhança de triângulos. Nela solicitava-se que fossem construídos dois triângulos retângulos semelhantes e que após a construção se justificasse por que os triângulos construídos eram semelhantes.

Na realização da tarefa, alguns professores traçaram dois triângulos retângulos quaisquer e justificaram que estes eram semelhantes apenas pelo fato de ambos terem um ângulo reto. Esta hipótese já havia emergido em discussões anteriores e, ao surgir novamente, observamos que a discussão levada a cabo anteriormente sobre semelhança de triângulos retângulos não havia sido suficiente para quebrar esta concepção dos professores que se mostrou resistente. É importante nos perguntarmos como, se existe esta concepção por parte dos professores, eles constroem os conceitos de seno, cosseno e tangente com base no estudo de triângulos retângulos, pois, já que para eles todos estes triângulos seriam semelhantes, tais conceitos estariam completamente

desvinculados da variação dos ângulos. Talvez por isso o hábito de registrar, também observado por nós, por exemplo, um valor de seno de um ângulo a partir das medidas dos lados de um triângulo como:

$$\text{sen} = \frac{a}{b} \text{ ao invés de } \text{sen } \alpha = \frac{a}{b}$$

Uma outra atividade tinha por objetivo retomar as relações de “cateto oposto ao ângulo α ” e “cateto adjacente ao ângulo α ”. Aqui eram dados vários triângulos retângulos de medidas e posições variadas. Em cada um deles eram nomeados os ângulos agudos por α e β (ou outro par de letras) e os catetos por x e y (ou outro par de letras) e solicitava-se que em cada um dos triângulos se indicasse o cateto oposto ao ângulo α , ao ângulo β , assim como o cateto adjacente a cada um destes ângulos.

Para a maioria dos professores foi uma surpresa descobrir que as expressões “cateto oposto ao ângulo α ” e “cateto adjacente ao ângulo α ” estavam relacionadas a um dos ângulos agudos do triângulo retângulo e não à posição do triângulo. Identificamos que um dos motivos para que alguns professores não percebessem a relação entre catetos e ângulos envolvida nas razões trigonométricas é a representação de triângulo retângulo trazida pela maior parte dos livros didáticos, nos quais, invariavelmente, um dos catetos está na posição horizontal e outro na vertical. Outro motivo é aquele já analisado na atividade anteriormente discutida.

Realizamos várias atividades que objetivavam construir o conceito de círculo trigonométrico, sendo duas delas as seguintes:

Atividade 11:

Construir, numa folha de papel milimetrado, do mesmo modo como foi feito na atividade 10, uma série de triângulos retângulos tais que:

- o ângulo do vértice O vai de 10° a 80° , variando de 10 em 10 graus;
- a medida da hipotenusa é sempre a mesma;
- um dos catetos permanece sobre o eixo suporte Ox e o outro cateto é perpendicular a este eixo.

Atividade 12:

Utilizando o desenho do exercício anterior, preencha a primeira e a segunda colunas da tabela abaixo, associando cada ângulo com seu seno e sendo α o ângulo do vértice O;

- Preencha a terceira coluna da tabela abaixo, sendo α o ângulo do vértice O;
- O que fazer com o seno de zero grau? E o seno de 90° ?
- O que fazer com o cosseno de 0° ? E de 90° ?
- Preencha a quarta coluna da tabela trigonométrica que você elaborou. O que você observou? Isto lhe lembra alguma situação de geometria?

α	$\text{sen } \alpha$	$\cos \alpha$	$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2$
0°			
10°			
20°			
30°			
40°			
50°			
70°			
80°			
90°			

Uma das primeiras dificuldades foi a manipulação dos instrumentos de desenho geométrico. A dificuldade de manipular o transferidor foi tão grande que elaboramos outras atividades com a finalidade de levar os professores a compreender e a utilizar transferidor como instrumento de medida. Alguns professores possuíam também dificuldades em manipular o compasso. Os livros didáticos, em geral, não trazem atividades de explicação do uso de tais instrumentos.⁸ Além disso, devemos recordar que nas décadas de formação escolar desses professores a disciplina de desenho geométrico foi ministrada, muitas vezes, como se fosse educação

artística, sem que fossem estudadas construções geométricas e suas justificativas. Mesmo quando, em matemática, eram trabalhados os conteúdos de geometria, não se enfocava, na maior parte das vezes, os aspectos de construção de figuras, impossibilitando o desenvolvimento de habilidades de utilização dos instrumentos de desenho geométrico. Outro problema surgido foi o de compreensão do grau de precisão da medida em função dos instrumentos de medida utilizados.

Os professores perceberam a relação da última coluna da tabela com o teorema de Pitágoras. Com base nesta atividade, foi construído o círculo trigonométrico.

Quando questionados se o raio do círculo trigonométrico teria que medir, necessariamente um, todos os professores responderam que sim, mas quando perguntamos o porquê deste fato, nenhum deles soube explicar. Observamos que nenhum dos livros analisados traz uma discussão acerca das convenções de orientação no círculo trigonométrico e a conveniência de se considerar o raio unitário.⁹ Assim, para os professores, tais convenções eram tidas como condições necessárias para a existência do círculo trigonométrico.

As duas últimas atividades tinham por finalidade ressaltar as relações entre simetria, semelhança e os valores de seno e de cosseno no círculo trigonométrico. Esperávamos que, dado um ângulo agudo, por exemplo de 30° , cujos valores de seno e de cosseno eles já conheciam, os professores encontrassem os valores de seno e de cosseno dos ângulos de 150° , 210° , 330° , utilizando os conceitos de simetria estudados anteriormente.

Atividade 14:

- a) Desenhar, no círculo trigonométrico um ângulo agudo. Destacar o triângulo retângulo correspondente.
- b) Realizar a reflexão em relação ao eixo vertical. Analisar os sinais do seno e do cosseno. Discutir a medida do ângulo, levando em conta que um dos lados do ângulo é fixo.

A maior parte dos professores teve muita dificuldade para utilizar o conceito de simetria para efetuar a atividade. Em nosso entender, tal dificuldade se deve a uma série de fatores. Um deles foi a complexidade da atividade, que exigia que se mobilizasse uma quantidade muito grande de conceitos (simetria, semelhança, ângulo orientado, eixos orientados, seno e cosseno de ângulos, etc.) para a compreensão de círculo trigonométrico. Outro fator a ser considerado é que grande parte dos professores estavam estudando o círculo trigonométrico pela primeira vez e nunca o tinham lecionado. Os que já tinham estudado o assunto, o fizeram de maneira mecânica, sem análise dos porquês dos valores encontrados no círculo trigonométrico. Por fim, consideramos que a diversidade de situações com relação à trigonometria, proposta por nós, não foi suficiente para abarcarmos todos os aspectos dos conceitos envolvidos.

Análise complementar dos livros didáticos

Para continuar nossa pesquisa sobre as dificuldades dos professores em trigonometria a análise dos livros didáticos de que falamos acima não foi suficiente e se fez necessário um retorno aos livros didáticos para examiná-los, agora sob outros critérios, relacionados mais diretamente com as dificuldades apresentadas

pelos professores. Os livros analisados foram:

1. DI PIERRO NETO, Scipione. *Matemática*. 4. ed. São Paulo: Scipione, 1987. v. 1, 2º grau.
2. IMENES, L. M.; TROTTA, F.; JAKUBOVIC, J. *Matemática aplicada*. São Paulo: Moderna. 1980. v. 1, 2, 3. 2º grau.

Os critérios de análise estão relacionados às perguntas:

- Há alguma explanação sobre a manipulação dos instrumentos de desenho?
- Ao tratar das noções “cateto oposto” e “cateto adjacente”, são usados recursos que ressaltem a ligação destes termos com o ângulo em questão? Os triângulos retângulos apresentados estão sempre na mesma posição sem haver comentários à possibilidade da posição variar?
- Traz comentários a respeito das convenções de orientação no círculo trigonométrico?
- Há explicação para o fato do raio ser unitário no círculo trigonométrico?
- Utiliza os conceitos de simetria ao estudar valores de seno e cosseno no círculo trigonométrico?

Nenhum dos dois livros analisados traz instruções de manipulação dos instrumentos de desenho geométrico. O livro de Imenes et al. discute os termos “oposto” e “adjacente” como relações entre catetos e ângulo agudo do triângulo retângulo, o que não se observa no livro Scipione. Nenhum dos dois livros traz discussões sobre a orientação dos ângulos no círculo trigonométrico. A convenção do raio unitário só é analisada no livro de Imenes et al. Nenhum dos livros utiliza explicitamente os conceitos de simetria de figuras para a explicação dos valores trigonométricos da primeira volta do círculo.

Conclusão

O livro de Imenes et al. não teve grande divulgação nas escolas à época de formação dos professores que compunham nossa amostra (cf. Nacarato, 2004, prelo). O texto do livro de Scipione não aborda os aspectos importantes para construção dos conceitos trigonométricos. Sendo assim, podemos afirmar que as dificuldades dos professores em trigonometria estão intimamente relacionadas à formação escolar das décadas de 70 e 80, caracterizada, entre outros aspectos, pelo descaso para com a trigonometria; pela formalização precoce de conceitos geométricos e trigonométricos presente nos livros didáticos; e pela memorização

de procedimentos sem a compreensão dos mesmos (cf. Pavanello, 1993 e Fiorentini, 1995).

Entendemos que para a superação das dificuldades analisadas no decorrer deste trabalho são necessárias ações de formação continuada, nas quais os professores possam expor suas dúvidas, realizar atividades de maneira autônoma, refletir sobre os conceitos envolvidos nas mesmas e socializar seus saberes construídos tanto nos momentos de formação acadêmica quanto na sua prática docente.

Apesar da avaliação positiva que os professores fizeram de nossos trabalhos, consideramos que a variedade de atividades foi insuficiente para a construção dos conceitos trigonométricos abordados. Segundo Vergnaud (1985),

Um conceito remete a muitas situações e, reciprocamente, uma situação remete a muitos conceitos. E o desenvolvimento dos conhecimentos de um aluno se faz através de um conjunto relativamente vasto de situações entre as quais existe “parentesco” e para análise das mesmas é necessário utilizar muitos conceitos e muitos tipos de simbolizações. (apud Sanchez, 1991, p. 10)

Nossa pesquisa aponta para a necessidade de estudos que averiguem como está sendo o ensino de trigonometria nos cursos de formação inicial de professores, de modo a indicar caminhos para uma aprendizagem significativa dos conceitos por parte desses futuros professores.

Notas

¹ Uma primeira versão deste artigo foi apresentada por ocasião do II SIPEM – Santos, 29 outubro – 1^a novembro de 2003.

² O Curso de Formação Continuada de Professores de Matemática, inicialmente pensado para ser realizado em 2001, com carga horária de 180 horas, foi ampliado de modo que os trabalhos tiveram continuidade em 2002 com mais 180 horas de atividades.

³ Professores da UFRN: dra. Arlete de Jesus Brito, dra. Bernadete Barbosa Morey (autoras do presente artigo) e Maria Marques. Os professores ligados à SECD eram Edílson Maia e Anilda Ferreira Guimarães.

⁴ Parte destas atividades foram inspiradas no curso ministrado pelo grupo CEM nos anos de 1987, 1988.

⁵ Contamos nesta pesquisa com dois bolsistas de Iniciação Científica (Tiago Pardo Severiano e Wellder Kleiber de Souza Miranda) que percorreram as bibliotecas de Natal em busca de tais livros. Estas alegaram não ter espaço suficiente para aguardar os livros didáticos de décadas passadas, o que as abrigou e obriga a se desfazerem dos mesmos.

⁶ Tal análise dos livros didáticos foi realizada pelos então bolsistas de iniciação científica Tiago Pardo Severiano e Wellder Kleiber de Souza Miranda. O resultado da análise e os critérios usados estão descritos em artigo que aguarda publicação.

⁷ Para descrição completa desta parte da pesquisa, veja-se Brito e Morey (2003) in Fossa, J. A. (Org.). (2003, prelo).

⁸ O que foi constatado mediante retorno aos livros didáticos analisados, conforme veremos abaixo.

⁹ Fato também constatado por ocasião da segunda análise feita dos livros didáticos.

Referências

BRITO, Arlete de Jesus. A Licenciatura em matemática na UFRN: a busca por novos paradigmas. *Coleção Pedagógica*, Natal, n. 4, p. 35-46, 2002.

CASTELNUOVO, Emma. Panorama de la enseñanza matemática en el tiempo y en el espacio. *Educación Matemática*, v. I, p. 24-29, dez. 1989.

DI PIERRO NETO, Scipione. *Matemática*. 4. ed. São Paulo: Scipione, 1987. v. 1.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. *Zetetiké*, Campinas, n. 4, p. 1-17, jun. 1995.

LEITE, Antonieta; SANTOS, Maria Cecília Doneux. Da composição e decomposição de polígonos às fórmulas para o cálculo de área. In: FRANCHI, Anna et al. *Geometria no 1º grau: da composição e da decomposição de figuras às fórmulas de área*. São Paulo: CLR Baleeiro, 1992.

NACARATO, Adair M.; BREDARIOL, Claudia M.; PASSOS, Miriam P. F. *Tendências presentes no ensino de trigonometria: uma abordagem histórica*. No prelo.

PAVANELLO, Regina O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Zetetiké*, Campinas, n. 1, ano I, p. 7, mar. 1993.

SANCHEZ, Lucília Bechara. Um estudo do desenvolvimento da noção de semelhança na resolução de problemas de ampliação e redução de figuras e implicações didáticas. *Cadernos do CEM*, n. 3, ano III, p. 5-25, 1991.

SOARES, Eliana Farias et al. Da prática do matemático para a prática do professor: mudando o referencial da formação matemática do licenciando. *Zetetiké*, Campinas, v. 5, n. 7, p. 25-36, jan./jun. 1997.

SOUZA, A. C. Carrera; TEIXEIRA, Marcos V.; BALDINO, Roberto R.; CABRAL, Tânia C. B. Novas diretrizes para a licenciatura e matemática. *Temas e Debates*, São Paulo, ano VIII, n. 7, p. 41-65, jul. 1995.

Sobre as autoras:

Arlete de Jesus Brito é professora do Curso de Matemática da UFRN. Leciona nos Programas de Pós-Graduação em Educação do CCSA/UFRN e em Ensino de Ciências Naturais e Matemática do CCET/UFRN. É doutora em Educação Matemática pela Unicamp.

Bernadete Barbosa Morey é professora do Curso de Matemática da UFRN. Leciona nos Programas de Pós-Graduação em Educação do CCSA/UFRN e em Ensino de Ciências Naturais e Matemática do CCET/UFRN. É doutora em Educação Matemática pela Universidade Amizade dos Povos (Moscou).